Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

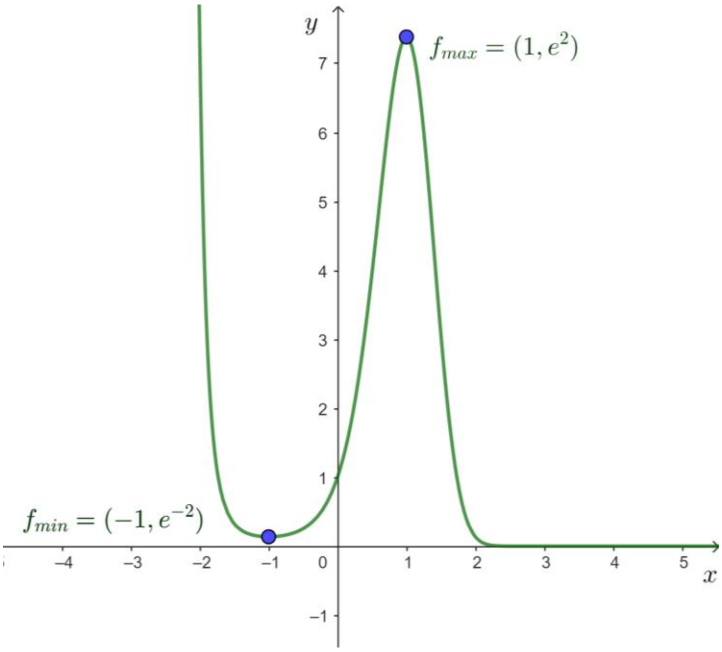
Utbildningskod: 764G07
Modul: TEN1

Matematisk analys del1
Lösningsskisser/facit
2024-08-13, kl.08.00-13.00

1. Superkort lösningsskiss: (hur en fullständig lösnings ska ser ut? gå till anteckningar från undervisningen med mera…)

$$f'(x) = (3 - 3x^2)e^{3x - x^3} = 3(1-x)(1+x)e^{3x - x^3},$$

$f'(x) = 0$ för $x = \pm 1$. Teckentabell visar att för $x = -1$ har funktionen lokal minimipunkt, där $f(-1) = e^{-2}$ och för $x = 1$ har funktionen lokal maximipunkt, där $f(1) = e^2$. Vidare gäller att $f(x) \longrightarrow +\infty$, då $x \longrightarrow -\infty$ och $f(x) \longrightarrow 0$, då $x \longrightarrow +\infty$, dvs $y = 0$ är en horisontell asymptot bara då $x \longrightarrow +\infty$.
(obs: tecknet " $\longrightarrow$ " läses som "$går\ mot$" och används då man ej använder sig av tecknet "lim" för beräkning av gränsvärden)



Svar: $f(x) > 0 \Longrightarrow f$unktionen har inga nollställen. $y = 0$ är en horisontell asymptot då $x \longrightarrow +\infty$. Lokal minimipunkt ges av $(-1, e^{-2})$ och lokal maximipunkt ges av $(1, e^2)$.
$V_f =]0, +\infty[$.

2. Superkorta lösningsskisser: (hur en fullständig lösnings ska ser ut? gå till anteckningar från undervisningen med mera…)

a) $\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)^2} = \frac{2e^{\frac{\pi}{6}i}}{\left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^2} = \cdots = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

Svar: $arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)^2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

b) Lös ekvationen $z^2 = 3 + 4i$. Sätter vi $z = a + bi$ får vi $a^2 - b^2 = 3$ och $2abi = 4i$.
Hjälpekvationen ges av $|z^2| = |3 + 4i| \Leftrightarrow |z|^2 = 5 \Longrightarrow a^2 + b^2 = 5$. Första och tredje sambandet ger $a = \pm 2$. Andra samdandet ger $b = \pm 1$. …

Svar: $z = \pm 2 \pm i$.

3.

a) $cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $eller$ $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n \;\; eller\; x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, d\ddot{a}r\; n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, d\ddot{a}r\; n \in \mathbb{Z}$$

Svar: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, d\ddot{a}r\; n \in \mathbb{Z}$

b) $\sqrt{3}sinx + cosx = 1 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sinx + \frac{1}{2}cosx\right) = 1 \Leftrightarrow sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad d\ddot{a}r\; n \in \mathbb{Z} \\ eller \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad d\ddot{a}r\; n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, \quad d\ddot{a}r\; n \in \mathbb{Z} \\ eller \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad d\ddot{a}r\; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Svar: $\begin{cases} x = 2\pi n, \quad d\ddot{a}r\; n \in \mathbb{Z} \\ eller \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad d\ddot{a}r\; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

4.

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x} = \begin{bmatrix} typ \\ "\frac{0}{0}" \end{bmatrix} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-2)}{x} = \frac{1}{3}$

Svar: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x} = \frac{1}{3}$

b) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2-2x} + x\right) = \left[\substack{typ \\ "\infty - \infty"}\right] = \lim_{x\to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)} = [fyll\; i] = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x}{\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)} =$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x}{\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} - x\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x}{\left(\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)} - x\right)} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2} = |x| \\ |x| = -x \; d\mathring{a}\; x < 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x}{\left(-x\cdot\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)} - x\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x}{-x\cdot\left(\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)} + 1\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{\left(\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)} + 1\right)} =$$

$$= \left[\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x} = 0\right] = \frac{2}{\sqrt{(1-0)}+1} = \frac{2}{\sqrt{1}+1} = 1$$

Svar: $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2-2x} + x\right) = 1$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{tanx} = \begin{bmatrix} typ \\ „\frac{0}{0}" \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{sinx}\cdot cosx = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{sinx}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot cosx = \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{1}{\frac{sinx}{x}}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot cosx =$

$$= \begin{bmatrix} \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1, där\ t = 2x \longrightarrow 0\ då\ x \longrightarrow 0 \\ \lim_{x\to 0} cosx = 1 \end{bmatrix} = 2\cdot\frac{1}{1}\cdot 1\cdot 1 = 2$$

Svar: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{tanx} = 2$

5. Funktionen lnx är definierad bara för $x > 0$, därför studerar vi $y(x) = lnx - 2ln(x+k),\ \ x > 0.$
Kurvan och linjen tangerar varandra i en punkt x som uppfyller

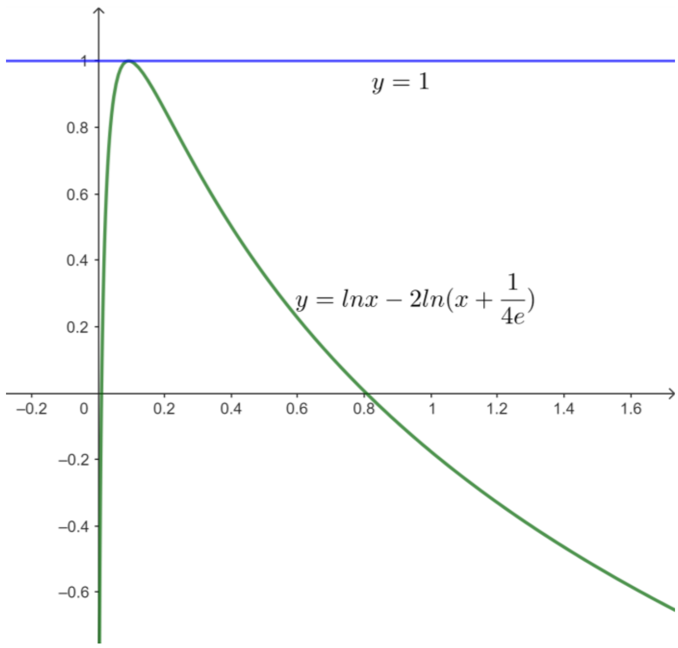
$$y'(x) = 0 \text{ och } y(x) = 1.$$

Då följer att

$$y'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+k} = \frac{k-x}{x(x+k)},\quad y'(x) = 0 \Longrightarrow k = x.$$

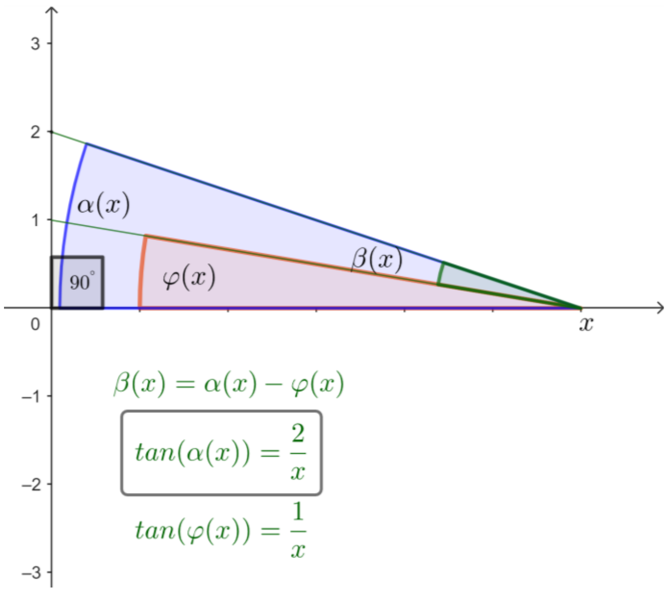
Detta betyder att vi kräver

$y(k) = 1 \Longrightarrow lnk - 2ln(k+k) = 1 \Leftrightarrow lnk - ln(2k)^2 = 1 \Leftrightarrow ln\frac{k}{(2k)^2} = 1 \Leftrightarrow ln\frac{1}{4k} = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4k} = e \Leftrightarrow k = \frac{1}{4e}$



Svar: $k = \frac{1}{4e}$ (obs: figuren bifogas bara som illustration, förväntas inte vid lösningen)

6.



Med figurens beteckningar skall vi maximera funktionen:

$\beta(x) = arctan\frac{2}{x} - arctan\frac{1}{x}$, $x > 0$.

Eftersom

$$\beta'(x) = \frac{1}{1+\frac{4}{x^2}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$
$$= \frac{-2}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{2-x^2}{(x^2+4)(x^2+1)} =$$
$$= \frac{(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$\beta'(x) = 0$ *och* $x > 0 \Longrightarrow x = \sqrt{2}$ där

$$\beta(\sqrt{2}\ ) = arctan\sqrt{2}\ - arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$$

får vi teckentabellen

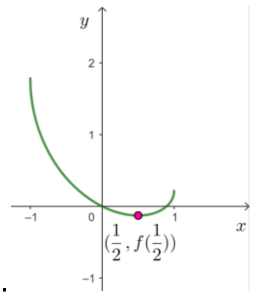
x	**0**		$\sqrt{2}$	
$\beta'(x)$		$+$	0	$-$
$\beta(x)$		$\nearrow$	$arctan\sqrt{2}\ - arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$

Detta visar att vinkeln är störst för $x = \sqrt{2}$, och att detta maximala värde är $arctan\sqrt{2}\ - arctan\frac{1}{\sqrt{2}} = arctan\frac{\sqrt{2}}{4}$. (visa den sista likheten som övning 😊)

Svar: Från $x = \sqrt{2}$ på positiva x -axeln ser man sträckan mellan punkterna $(0,1)$ och $(0,2)$ under maximal vinkel. Det maximala värdet av vinkeln är $arctan\sqrt{2}\ - arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. Superkort lösningsskiss:

Låt $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} - \frac{\arcsin(x)}{2}$, $-1 \le x \le 1$, $f(x)$ är kontinuerlig och deriverbar på $-1 \le x \le 1$. Vidare gäller att $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x-1}{2\sqrt{1-x^2}}$, $f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{2x-1}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, som ligger i intervallet $-1 < x < 1$. Eftersom $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0, f(1) > 0$ *och* $f(-1) > 0$ ser vi att f *har två nollställen* $\Longrightarrow$ att ekvationen $1 - \sqrt{1-x^2} = \frac{\arcsin(x)}{2}$ *har två* rötter.



Svar: Ekvationen $1 - \sqrt{1-x^2} = \frac{\arcsin(x)}{2}$ *har två* rötter .

OBS: extra till uppgift 7 med små steg 😉

- $$f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\sqrt{1-\frac{1}{4}}-\frac{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}{2}=\left[\begin{array}{c}\arcsin(x)=v\Longrightarrow sinv=x\ \ och\ -\frac{\pi}{2}\leq v\leq\frac{\pi}{2}\\ alltså\\ \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=v\Longrightarrow sinv=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow v=\frac{\pi}{6}\ ,ty\ -\frac{\pi}{2}\leq v\leq\frac{\pi}{2}\end{array}\right]=$$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}}{2}\quad där\quad\left[\begin{array}{c}1<\sqrt{3}<2\\ \frac{1}{2}=\frac{3}{6}<\frac{\pi}{6}<\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\\ 1+\frac{1}{2}<\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}<2+\frac{2}{3}\\ -1-\frac{1}{2}>-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}>-2-\frac{2}{3}\\ 1-1-\frac{1}{2}>1-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}>1-2-\frac{2}{3}\\ -\frac{3}{6}>1-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}>-\frac{10}{6}\\ -\frac{10}{6}<1-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}<-\frac{3}{6}\\ -\frac{10}{12}<f\left(\frac{1}{2}\right)<-\frac{3}{12}\Longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)<0\end{array}\right]\quad \text{alltså } f\left(\frac{1}{2}\right)<0.$$

- $$f(-1)=1-\sqrt{1-1}-\frac{\arcsin(-1)}{2}=1-\frac{\arcsin(-1)}{2}=\left[\begin{array}{c}\arcsin(x)=v\Longrightarrow sinv=x\ \ och\ -\frac{\pi}{2}\leq v\leq\frac{\pi}{2}\\ alltså\\ \arcsin(-1)=v\Longrightarrow sinv=-1\ \Leftrightarrow v=-\frac{\pi}{2}\ ,ty\ -\frac{\pi}{2}\leq v\leq\frac{\pi}{2}\end{array}\right]=$$

  $=1-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1+\frac{\pi}{4}>0$, alltså $f(-1)>0$.

- $$f(1)=1-\sqrt{1-1}-\frac{\arcsin(1)}{2}=1-\frac{\arcsin(1)}{2}=\left[\begin{array}{c}\arcsin(x)=v\Longrightarrow sinv=x\ \ och\ -\frac{\pi}{2}\leq v\leq\frac{\pi}{2}\\ alltså\\ \arcsin(1)=v\Longrightarrow sinv=1\ \Leftrightarrow v=\frac{\pi}{2}\ ,ty\ -\frac{\pi}{2}\leq v\leq\frac{\pi}{2}\end{array}\right]=$$

  $=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{4}>0$, alltså $f(1)>0. Obs\colon \frac{\pi}{4}<1$.

$f(x)$ är kontinuerlig och deriverbar på $-1\leq x\leq 1$, mha funna värden kan vi fylla i tabell på följande sätt,

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$			0		
$f(x)$	$f(-1)>0$	$\searrow$	$f_{min}\left(\frac{1}{2}\right)<0$	$\nearrow$	$f(1)>0$